Gourdon

Réduction des Endomorphismes Normaux.

Lemme 1 : Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ et F un sev stable par u. Alors $F^\perp$ est stable par u^*.

Preuve : Soit $x \in F$. Par hypothèse, $u(x) \in F$. Ainsi, $\forall y \in F^\perp$, $\langle u(x), y\rangle = 0 \Leftrightarrow \forall y \in F^\perp \underbrace{\langle x, u^*(y)\rangle}_{=0}$

Ceci étant vrai $\forall x \in F$, on a $u^*(y) \in F^\perp$ d'où $F^\perp$ stable par u^*.

Lemme 2 : Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ normal. Si E_λ est un sous-espace propre de u. Alors $E_\lambda^\perp$ est stable par u.

Preuve : Comme u et u^* commutent, E_λ est stable par u^*. Donc par le lemme 1, $E_\lambda^\perp$ stable par u.

Lemme 3 : Soit E un espace euclidien de dimension 2. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ normal n'ayant pas de valeurs propres réelles.

Alors dans toute base B orthonormée de E, la matrice de u dans la base B est

$$Mat_B(u) = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \text{ où } b \neq 0.$$

Preuve : On pose $M = Mat_B(u) = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ avec $b \neq 0$ car u est sans valeurs propre réelle. Comme u est normal, $M^* M = M M^*$ d'où $\begin{cases} a^2 + c^2 = a^2 + b^2 & (1) \\ ab + cd = ac + bd & (2) \end{cases}$ D'où (1) donne $b = \pm c$.

Si $b = c$ alors M est symétrique impossible puisque u est sans valeurs propre réelles.

Donc $b = -c$ donc (2) s'écrit $2(a-d)b = 0 \Rightarrow a = d$ car $b \neq 0$.

$$\text{D'où } Mat_B(u) = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \text{ où } b \neq 0.$$

Théorème : Soit E un espace euclidien et $u \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme normal.

Alors, il existe une base B orthonormale de E telle que $Mat_B(u) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & & & 0 \\ & \ddots & & & & \\ & & \lambda_r & & & \\ & & & \tau_1 & & \\ & & & & \ddots & \\ 0 & & & & & \tau_p \end{pmatrix}$ (*)

où $\lambda_i \in \mathbb{R}$ et $\tau_j = \begin{pmatrix} a_j & -b_j \\ b_j & a_j \end{pmatrix}$

Preuve : On procède par récurrence sur $n = \dim(E)$

* Si u possède au moins une valeur propre $\lambda \in \mathbb{R}$. On pose $E_\lambda = Ker(u - \lambda Id)$. Ainsi, $F = E_\lambda^\perp$ est stable par u et u^* d'après le lemme 1 et 2. Comme $u_{|F}$ et $u_{|F}^*$ commutent, et que $\dim(F) = \dim(E) - \dim(E_\lambda) \leq n-1$, d'après l'hypothèse de récurrence, il existe B_F orthonormale telle que $Mat_{B_F}(u)$ a la forme (*).

En notant B_{E_λ} une base orthonormale de E_λ. La base $B = (B_{E_\lambda}, B_F)$ est une base orthonormée de E telle que $Mat_B(u) =$ (*).

* Si u est sans valeur propre réelle :

Soit $Q(X) = X^2 - 2\alpha X + \beta$ un facteur irréductible dans $\mathbb{R}[X]$ du polynome caractéristique χ_u.

On pose $N = \operatorname{Ker} Q(u)$.

Montrons que $N \neq \{0\}$:

Comme Q est irreductible dans $\mathbb{R}[X]$, $Q(X) = (X-\lambda)(X-\bar{\lambda})$ dans $\mathbb{C}[X]$.

On note $M = \mathcal{M}at_{B}(u)$ où B quelconque. λ est racine de Q et $Q \mid \chi_u$ d'où $\det(M - \lambda I_n) = 0$

Donc $\operatorname{Det}(Q(u)) = \operatorname{Det}(Q(M)) = \det(M - \lambda I_n)\det(M - \bar{\lambda} I_n) = 0$.

Donc $Q(u)$ est non bijectif (car $Q(M) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ pas inversible) Donc N injectif d'où $N \neq \{0\}$.

On a également N stable par u, et la commutativité de u et u^* entraine N stable par u^* car $u^* Q(u) = Q(u) u^*$

On pose $v = u_{|N}$ et $v^* = u^*_{|N}$ tel que $v^* v = (u^* u)_{|N}$ soit symetrique et donc admette une valeur propre $\mu \in \mathbb{R}$.

Soit $x \in N \setminus \{0\}$ tel que $v^* v(x) = \mu x$. On pose $F = \operatorname{Vect}(x, u(x))$ qui est de dim 2 car u est sans valeur propre réelle donc $(x, u(x))$ libre.

Or F est stable par u donc $F = \operatorname{Vect}(u(x), u^2(x))$.

Montrons que F est stable par u^* :

* $u^* u(x) = v^* v(x) = \mu x \in F$
* $u^*(u^2(x)) = u(\mu x) = \mu u(x) \in F$ par normalité de u

Donc F est stable par u et u^*. Donc $u_{|F}$ est normal.

Ainsi, par le lemme 3, $\exists B_F$ une base orthonormée de F tq $\mathcal{M}at_{B_F}(u) = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ où $b \neq 0$.

Montrons que $F^\perp$ stable par u et u^* :

F est stable par u et u^* donc par le lemme 1, $F^\perp$ est stable par u^* et $u^{**} = u$.

Donc $u_{|F^\perp}$ est normal et $\operatorname{Dim}(F^\perp) = n-2$. Donc par hypothèse de recurrence il existe $B_{F^\perp}$ base orthonormée de $F^\perp$ telle que $\mathcal{M}at_{B_{F^\perp}}(u) = (*)$.

Ainsi, $B = (B_{F^\perp}, B_F)$ est une base orthonormale de E tq $\mathcal{M}at_B(u) = (*)$.